Clasa a VI-a

Subiectul 1. Fie triunghiul echilateral ABC. Pe laturile (BC), (CA), (AB) se consideră punctele M, N şi respectiv P astfel încât

$$m\left(\widehat{NBC}\right) = x^\circ, \quad m\left(\widehat{ANP}\right) = 2x^\circ, \quad m\left(\widehat{BPM}\right) = 3x^\circ.$$

a) Arătaţi că triunghiul BPN este isoscel.
b) Dacă $x = 15$, demonstraţi că $MN \perp AC$.

Mircea Fianu

Soluţie. a) Unghiul $\widehat{ANB}$ este exterior triunghiului BNC, deci $m\left(\widehat{ANB}\right) = x^\circ + 60^\circ$. Avem

$$m\left(\widehat{BNP}\right) = m\left(\widehat{ANB}\right) - m\left(\widehat{ANP}\right) = 60^\circ - x^\circ$$

şi

$$m\left(\widehat{ABN}\right) = m\left(\widehat{ABC}\right) - m\left(\widehat{ABN}\right) = 60^\circ - x^\circ.$$

Prin urmare, $\widehat{BNP} \equiv \widehat{ABN}$, adică triunghiul BPN este isoscel.

b) Dacă $x = 15$, atunci, conform punctului a), triunghiul BPN este dreptunghic isoscel.

Deoarece $m\left(\widehat{BPM}\right) = 45^\circ$, rezultă că $[PM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BPN}$. Cum triunghiul BPN este isoscel cu baza $[BN]$, rezultă că PM este mediatoarea segmentului $[BN]$. În consecinţă, $[BM] \equiv [MN]$, adică triunghiul BMN este isoscel. Înseamnă că $m\left(\widehat{BNM}\right) = m\left(\widehat{CBN}\right) = 15^\circ$.

Unghiul $\widehat{NMC}$ este exterior triunghiului BMN, deci $m\left(\widehat{CNM}\right) = 2m\left(\widehat{MBN}\right) = 30^\circ$.

Rezultă că în triunghiul MNC, $m\left(\widehat{CNM}\right) = 90^\circ$, adică $MN \perp AC$.

Subiectul 2. Numerele naturale a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi. Ştiind că unul din cele trei numere le divide pe celelalte două, arătaţi că triunghiul este isoscel.

Florian Dumitrel

Soluţie. Presupunând că $a \mid b$ şi $a \mid c$, există $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b = ma$ şi $c = na$.

Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $b \leq c$; atunci $m \leq n$.

Cum $a + b > c$, rezultă că $a + ma > na$, deci $m + 1 > n$, adică $m \geq n$.

Ca urmare, $m = n$, deci $b = c$, adică triunghiul este isoscel.

Subiectul 3. a) Arătaţi că 2008 se poate scrie ca suma modulelor a patru divizori întregi, diferiţi, ai lui 2008.

b) Arătaţi că orice număr natural nenul A, divizibil cu 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie ca suma modulelor a $n+1$ divizori întregi diferiţi ai numărului A.

Mircea Fianu

Soluţie. a) $2008 = |-251| + |251| + |502| + |1004|$.

b) Dacă A este divizibil cu 2^n, atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A = 2^n \cdot p$.

Deoarece $\underbrace{1 + 2 + ... + 2^{n-1}}_{n \text{ numere}} = 2^n - 1$, rezultă că

$$|-1| + |1| + |2| + \left|2^2\right| + ... + \left|2^{n-1}\right| = 2^n,$$

de unde, înmulţind cu p, obţinem:

$$A = 2^n p = \underbrace{|-p| + |p| + |2p| + \left|2^2 p\right| + ... + \left|2^{n-1} p\right|}_{n+1 \text{ numere}}.$$

Subiectul 4. La un concurs se dau 4 probleme. Pentru rezolvarea corectă şi completă a primei probleme se acordă 2 puncte, 3 puncte pentru a doua, 5 pentru a treia şi 9 puncte pentru a patra problemă. Pentru fiecare problemă nerezolvată sau incomplet rezolvată se acordă 1 punct din oficiu (nu se acordă punctaje intermediare).

a) Arătaţi că dacă doi concurenţi au obţinut acelaşi punctaj, atunci au rezolvat, corect şi complet, aceleaşi probleme.

b) Demonstraţi că dacă suma punctajelor tuturor concurenţilor este un număr par mai mare sau egal cu 90, atunci, la una dintre probleme, cel puţin doi concurenţi au obţinut acelaşi punctaj.

Ioan Valeriu

Soluţie. a) Scăzând punctul din oficiu pentru fiecare problemă, putem spune că fiecărui concurent i se acordă 4 puncte din oficiu, iar pentru rezolvarea problemei 1 i se acordă suplimentar 1 punct, pentru rezolvarea celei de-a doua 2 puncte, 4 puncte pentru a treia şi 8 pentru a patra.

Ca urmare, punctajul obţinut de un concurent A este $4 + a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4$, unde $a_i = 1$ dacă a rezolvat corect problema i şi $a_i = 0$ dacă nu a rezolvat-o.

Dacă doi concurenţi A şi B au acelaşi punctaj, cu notaţiile de mai sus, rezultă:

$$4 + a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 4 + b_1 + 2b_2 + 4b_3 + 8b_4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = b_1 + 2b_2 + 4b_3 + 8b_4.$$

Ca urmare, a_1 şi b_1 au aceeaşi paritate, şi cum $a_1, b_1 \in \{0, 1\}$, rezultă $a_1 = b_1$.

Înlocuind, rezultă $a_2 + 2a_3 + 4a_4 = b_2 + 2b_3 + 4b_4$ şi, procedând asemănător ca mai sus, obţinem succesiv:

$$a_2 = b_2 \Rightarrow a_3 + 2a_4 = b_3 + 2b_4 \Rightarrow a_3 = b_3 \Rightarrow a_4 = b_4,$$

deci cei doi concurenţi au rezolvat aceleaşi probleme.

b) Conform punctului a), un concurent poate obţine un punctaj între 4 şi 19 puncte (16 valori).

Dacă există doi concurenţi cu punctaje egale, atunci ei au rezolvat aceleaşi probleme, conform punctului a).

Deoarece pentru problemele 2, 3 şi 4 fiecare concurent primeşte un număr impar de puncte (indiferent dacă le rezolvă complet sau nu), suma punctajelor obţinute la aceste probleme este un număr impar. Ca urmare, dacă un concurent are un număr impar de puncte, atunci el a rezolvat în mod sigur problema 1.

Presupunând că toţi concurenţii au obţinut punctaje diferite pare, atunci suma maximă obţinută ar fi:

$$4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 88 \text{ de puncte.}$$

Cum suma punctajelor este mai mare ca 90, rezultă că există cel puţin un concurent care a obţinut un număr impar de puncte. Însă suma punctajelor este număr par, deci numărul celor care au obţinut un număr impar de puncte este par (cel puţin 2), deci, conform observaţiei, problema 1 a fost rezolvată de cel puţin doi concurenţi.